



SCHULINTERNER LEHRPLAN DER GOETHESCHULE ESSEN ZUM KERNLEHRPLAN FÜR DIE GYMNASIALE EINFÜHRUNGSPHASE

Mathematik

INHALTSVERZEICHNIS

Schulinterner Lehrplan der Goetheschule Essen zum Kernlehrplan für die gymnasiale Oberstufe	1
1. Die Fachschaft Mathematik an der Goetheschule	3
2. Unterrichtsvorhaben	5
2.1 Übersicht über die Reihenfolge der Unterrichtsvorhaben in der Einführungsphase	5
2.2 Übersicht über die Reihenfolge der Unterrichtsvorhaben in der Einführungsphase	

1. DIE FACHSCHAFT MATHEMATIK AN DER GOETHESCHULE

Die Goetheschule befindet sich im Stadtteil Bredeney im Süden der Stadt Essen und ist dort eines von zwei öffentlichen Gymnasien. Sie liegt in einem ruhigen Wohngebiet und hat eine eher homogene Schülerschaft, was den sozialen und ethnischen Hintergrund betrifft. Zurzeit unterrichten etwa 65 Lehrerinnen und Lehrer etwa 800 Schülerinnen und Schüler, die vorwiegend aus Bredeney und den benachbarten Stadtteilen des Schulstandorts stammen.

In der Oberstufe sind durchschnittlich etwas mehr als 100 Schülerinnen und Schüler in einer Jahrgangsstufe. Diese ergeben sich nicht nur aus der drei- bis vierzügigen Sekundarstufe ein, sondern auch durch die Aufnahme von Realschülern. Hinzu kommen ebenso Schülerinnen und Schüler von anderen Essener Gymnasien und aus den Nachbarstädten, die neben dem Abitur den an der Goetheschule angebotenen IB-Abschluss erlangen möchten.

Das Fach Mathematik wird in der Regel in der Einführungsphase in vier bis fünf Grundkursen unterrichtet, aus denen sich in der Qualifikationsphase in der Regel zwei Leistungs- und drei Grundkurse entwickeln. Die Mathematikgrundkurse werden dreistündig (eine Doppelstunde und eine Einzelstunde), die Leistungskurse fünfstündig (zwei Doppelstunden und eine weitere Doppelstunde, die jede zweite Woche stattfindet) unterrichtet. Darüber hinaus wird in der Einführungsphase ein Vertiefungskurs eingerichtet. Neben diesen Kursen gibt es in der Q1 und Q2 einen IB-Mathematikurs, der zweistündig unterrichtet wird. In diesem werden die im Grund- und Leistungskurs unterrichteten Themen aufgegriffen, vertieft und durch IB relevante Themen angereichert.

Die Fachschaft Mathematik fühlt sich in besonderer Weise verpflichtet, Schülerinnen und Schüler ihren Begabungen und Neigungen entsprechend individuell zu fördern sowie ihnen eine umfassende Orientierung im Bereich des MINT-Schwerpunktes unserer Schule für ihren weiteren Lebensweg zu bieten.

Schülerinnen und Schüler aller Klassen- und Jahrgangsstufen werden zur Teilnahme an den vielfältigen Wettbewerben im Fach Mathematik ermutigt und darin begleitet. Für die Sekundarstufe II gibt es neben den Teilnahmemöglichkeiten an den schon aus der Sekundarstufe I schon bekannten Wettbewerben (Essener Mathematikwettbewerb/Mathematikolympiade, Bolyai-Wettbewerb, Bundeswettbewerb Mathematik, Känguru-Wettbewerb) noch den Internationalen Modellierungswettbewerb in Maastricht, zu dem jährlich ein Team aus fünf Oberstufenschülerinnen und -schülern antritt.

Es herrscht in der Fachschaft Mathematik Einigkeit darüber, dass neben innermathematischen Fragestellungen die mathematischen Fachinhalte in sinnstiftenden Kontexten und mit Lebensweltbezug vermittelt werden, wann immer sich das anbietet (besonders in den Kompetenzbereichen „Modellieren“ und „Problemlösen“). So werden die Schülerinnen und Schüler schon auf die in den zentralen Prüfungen in der Sekundarstufe II gängige Praxis der Verwendung von Kontexten vorbereitet.

Es wird in der Sekundarstufe I großen Wert darauf gelegt, dass die Schülerinnen und Schüler zunehmend mit mathematischen Werkzeugen und Software als Hilfsmitteln arbeiten können.

Hierzu zählen Tabellenkalkulationsprogramme (Excel) begonnen ab Klasse 6, Geometriesoftware (Geogebra) und das in der Jahrgangsstufe 8 eingeführte MMS TI-Nspire CAS als App auf dem Schüleripad. Daher kann in der Sekundarstufe II davon ausgegangen werden, dass die Schülerinnen und Schüler mit den grundlegenden Möglichkeiten dieser digitalen Werkzeuge vertraut sind.

Derzeit wird in der Oberstufe noch ab der Einführungsphase mit dem CAS Taschenrechner das Modell TI-Nspire gearbeitet. Der in der Vergangenheit in der Klasse 7 eingeführt wurde. Langfristig ist geplant, dass das derzeit in Klassenstufe 8 eingeführte MMS auch in der Oberstufe weitergehend benutzt wird.

2. UNTERRICHTSVORHABEN EINFÜHRUNGSPHASE

2.1 ÜBERSICHT ÜBER DIE REIHENFOLGE DER UNTERRICHTSVORHABEN IN DER EINFÜHRUNGSPHASE

Einführungsphase		
Unterrichtsvorhaben	Thema	Stundenzahl
E-A1	Funktionen und ihre Graphen beschreiben: Eigenschaften und Transformationen	Ca. 20 – 1. Quartal
E-A2	Differentialrechnung Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate	Ca. 20 – 2. Quartal
E-A3	Funktionsuntersuchung: Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktionen	Ca. 20 – 3. Quartal
E- G1	Koordinatisierungen des Raumes: Punkte, Ortsvektoren, Vektoren Eigenschaften von Vektoren: Länge, Kollinearität (E-G1)	Ca. 20 – 4. Quartal
E - G2	Geraden und Strecken: Parameterform Lagebeziehung von Geraden: identisch, parallel, windschief, sich schneidend, Schnittpunkte (E-G2)	

2.2 DETAILLIERTE AUSFÜHRUNGEN DER UNTERRICHTSVORHABEN EINFÜHRUNGSPHASE

Unterrichtsvorhaben E-A1: Funktionen und ihre Graphen beschreiben:(ca. 12 Unterrichtsstunden)

Eigenschaften und Transformationen

INHALTSFELD: FUNKTIONEN UND ANALYSIS (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

Funktionen: Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten sowie ganzrationale Funktionen und deren Eigenschaften: Verlauf des Graphen, Definitionsbereich, Wertebereich, Transformationen, Nullstellen, Symmetrie und Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

Kompetenzerwartungen

Inhaltsbezogene Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler

- (1) bestimmen die Eigenschaften von Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten und von ganzrationalen Funktionen,
- (2) lösen Polynomgleichungen, die sich durch einfaches Ausklammern auf lineare oder quadratische Gleichungen zurückführen lassen, ohne Hilfsmittel
- (3) erkunden und systematisieren den Einfluss von Parametern im Funktionsterm auf die Eigenschaften der Funktion (quadratische Funktionen, Potenzfunktionen, Sinusfunktion),
- (4) wenden Transformationen bezüglich beider Achsen auf Funktionen (ganzrationale Funktionen, Sinusfunktion) an und deuten die zugehörigen Parameter

Buch | EdM | EF | Kapitel 1 | Funktionen

Zu Beginn des Schuljahres sollen zentrale Eigenschaften von Funktionen (Exponential-, quadratische - und Sinusfunktionen) untersucht werden, die schon aus der Sek I bekannt sind und für die noch keine Differentialrechnung benötigt wird. Dabei werden wichtige Begriffe zum Thema Funktionen (zum Beispiel Definitions- und Wertebereich) wiederholt.

Zur Vorbereitung auf die ganzrationalen Funktionen werden nun die Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten eingeführt. Hier bietet sich eine arbeitsteilige Gruppenarbeit an, um das Grenzverhalten und die Symmetrie der Funktionen mit positiven/negativen/geraden/ungeraden Exponenten zu untersuchen.

Anknüpfend an die Klasse 10 werden die Transformationen auf Potenz- und ganzrationale Funktionen übertragen. Folgende Transformationen werden an Potenz- und ganzrationalen Funktionen durchgeführt: Verschiebungen, Streckungen und Spiegelungen.

Bezüglich der Lösung von Gleichungen im Zusammenhang mit der Nullstellenbestimmung wird durch geeignete Aufgaben Gelegenheit zum Üben von Lösungsverfahren ohne Verwendung des CAS gegeben. Hierbei werden die aus der Sek I von quadratischen Gleichungen

Prozessbezogene Kompetenzen

Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus,
Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese,
Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus,
Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden,
Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ...
- Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern,
 - zielgerichteten Variieren von Parametern von Funktionen,
 - Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen,
- Pro-(1) stellen Fragen zu zunehmend komplexen Problemsituationen,
Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,
Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein,
Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,
Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern,

bekannten Faktorisierungsverfahren (besonders Ausklammern) eingeübt; exemplarisch kann auch das Substituieren biquadratischer Funktionsterme durchgeführt werden. Die Anzahl der Nullstellen und die Bedeutung von deren Vielfachheit werden thematisiert. Die Nullstellenbestimmung kann auch später im Themenbereich des graphischen Ableitens oder der Funktionsuntersuchung erfolgen.

Während der kompletten Unterrichtsreihe sollten die Funktionen des CAS – Rechner erlernt und vertieft werden.

Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz, Arg-(2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele, Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur, Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können, Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen, Kom-(5) formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege, Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang, Kom-(7) wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus, Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen, Kom-(10)konzipieren, erstellen und präsentieren analoge und digitale Lernprodukte, Kom-(11)greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter.	
--	--

Unterrichtsvorhaben E-A2: Differentialrechnung (ca. 18 Unterrichtsstunden)

Von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate

INHALTSFELD: FUNKTIONEN UND ANALYSIS (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

- Grundverständnis des Ableitungsbegriffs: mittlere und lokale Änderungsrate, graphisches Ableiten, Sekante und Tangente
- Differentialrechnung: Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel), Monotonie, Extrempunkte, lokale und globale Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte

Kompetenzerwartungen: Die Schülerinnen und Schüler

- (5) berechnen mittlere und lokale Steigungen und Änderungsraten und interpretieren sie im Sachkontext,
- (6) erläutern den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und zurückgelegter Strecke anhand entsprechender Funktionsgraphen,
- (7) erläutern qualitativ auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs an Beispielen den Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate und nutzen die Schreibweise $\lim_{x \rightarrow \dots} f(x)$,
- (8) deuten die Ableitung an einer Stelle als lokale Änderungsrate sowie als Steigung der Tangente an den Graphen,
- (9) bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel,
- (10) beschreiben und interpretieren Änderungsraten funktional (Ableitungsfunktion),

Buch | EdM | EF | Kapitel 2 | Differentialrechnung

In verschiedenen Anwendungskontexten (z. B. Bewegungen, Zu- und Abflüsse, Höhenprofil, ...) werden durchschnittliche Änderungsraten, durchschnittliche Steigungen und anknüpfend daran der Sekantenbegriff an einen Funktionsgraphen erarbeitet und solche Sekanten betrachtet, berechnet und im Kontext interpretiert.

Ein möglicher konkreter Zugang zum Ableitungsbegriff als Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate und einer propädeutischen Verwendung eines Grenzwertbegriffs an einer Stelle wäre dabei die Verallgemeinerung des von der Geradengleichung bekannten Steigungsbegriffes anhand von Höhenprofilen, zu denen zunächst Sekantensteigungen berechnet werden. Bei genauerer Betrachtung der Streckenabschnitte wird auffallen, dass lokal auch deutlich höhere Steigungen auftreten können, während die Sekantensteigung nur eine durchschnittliche Steigung für den jeweiligen Streckenabschnitt darstellt. Am Beispiel dieser lokalen Änderungsraten kann der Begriff der Tangente an einen Funktionsgraphen eingeführt und die lokale Änderungsrate als Steigung dieser Tangente an den Graphen gedeutet werden.

Ein konkreter, beispielhafter Aufgabenvorschlag dazu wäre die Aufgabe „Höhenprofil des Bredeneyer Berges“, das durch eine quadratische Funktion modelliert werden kann. Hierbei kann die Frage diskutiert

(11) leiten Funktionen graphisch ab und entwickeln umgekehrt zum Graphen der Ableitungsfunktion einen passenden Funktionsgraphen, (13) nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten. (14) wenden die Summen- und Faktorregel an und beweisen eine dieser Ableitungsregeln, Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt, Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch, Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten, Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus, Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum ... - Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen, Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells, Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung, Pro-(2) analysieren und strukturieren die Problemsituation,	werden, an welcher Stelle die Straße ihre maximale Steigung aufweist und ob diese tatsächlich, wie auf einem Verkehrsschild angegeben, 8% beträgt. An dieser Stelle kann auch ein trigonometrisches Verständnis wiederholt und vertieft werden, indem zu den (prozentualen) Steigungen auch der zugehörige Steigungswinkel ermittelt wird. Die Übertragung dieses rein geometrischen Steigungsbegriffes könnte dann im Nachgang auch auf ganz andere Anwendungssituationen übertragen werden, in denen als unabhängige Variable die Zeit auftritt und die lokale Steigung des Graphen dann als momentane Änderungsrate interpretiert werden kann. Dies sollte insbesondere für Weg-Zeit-Diagramme durchgeführt werden, wo die lokale Steigung des Graphen der Momentangeschwindigkeit entspricht. Ein MMS – vorzugsweise der CAS-Rechner – wird zur numerischen und graphischen Darstellung des Grenzüberganges von der durchschnittlichen zur lokalen Änderungsrate bzw. der Sekante zur Tangente eingesetzt. Punktuell kann hier auch die dritte mögliche Interpretation der Ableitung als beste lineare Approximation des Graphen, z.B. durch Zoomen, thematisiert werden. Hierbei wird die Limes-Schreibweise verwendet. Der Begriff der Tangente wird in Abgrenzung zu den in der SI aufgebauten Vorstellungen problematisiert und analytisch definiert. Im Zusammenhang mit dem graphischen Ableiten und dem Begründen der Eigenschaften eines Funktionsgraphen sollen die Schülerinnen und Schüler in besonderer Weise zum Vermuten, Begründen und Präzisieren ihrer Aussagen angehalten werden. Insbesondere sollen hierbei auch umgekehrte Betrachtungen durchgeführt werden, wie
--	---

Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren), Pro-(4) erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen, Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein, Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur, Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen, Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente, Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise, Arg-(12) beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit Arg-(13) überprüfen, inwiefern Ergebnisse, Begriffe und Regeln verallgemeinert werden können, Kom-(2) beschreiben Beobachtungen, bekannte Lösungswege und Verfahren, Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen, Kom-(4) erfassen und erläutern mathematische Darstellungen, auch wenn diese nicht vertraut sind, Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang, Kom-(8) wechseln flexibel zwischen mathematischen Darstellungsformen.	vom Graphen der Ableitungsfunktion auf einen passenden Graphen der Ursprungsfunktion geschlossen werden kann. Dies bereitet an dieser Stelle schon zentrale Ideen der nachfolgenden Unterrichtsreihe A3 Funktionsuntersuchung vor, insbesondere auch die Bedeutung von Nullstellen, sowie auch eine propädeutische Vorstellung für die Qualifikationsphase von Stammfunktionen, die noch nicht als solche bezeichnet werden, deren Uneindeutigkeit aber schon angesprochen werden kann. Parallel hierzu wird die Frage aufgeworfen, ob mehr als numerische und qualitative Untersuchungen in der Differentialrechnung möglich sind. Für geeignete einfache Funktionen, mindestens aber für die Normalparabel $f(x)=x^2$, werden der Grenzübergang bei der „h-Methode“ unter Verwendung der Limeschreibweise exemplarisch durchgeführt und erste Ableitungsfunktionen berechnet. Um die Ableitungsregel für (höhere) natürliche Potenzen zu vermuten, können weitere Berechnungen mithilfe des Differenzenquotienten durchgeführt werden, auch unter sinnvoller Nutzung des CAS-Rechners. Die Potenzregel für Ableitungen wird formuliert und eine heuristische, beispielgebundene Beweisidee ist an dieser Stelle möglich und kann optional erarbeitet werden. Der Unterricht erweitert hier besonders Kompetenzen aus dem Bereich des Argumentierens. Ein formaler Beweis im Sinne der Analysis sollte dann im Anschluss sinnvoll am Beispiel der Faktorregel oder Summenregel erfolgen. Damit ist die innermathematische Reihe zur Differentialrechnung sinnvoll abgeschlossen und kann als Vorbereitung der Funktionsuntersuchung genutzt werden.
--	--

Unterrichtsvorhaben E-A3: Funktionsuntersuchung (ca. 18 Unterrichtsstunden)

Entwicklung und Anwendung von Kriterien und Verfahren zur Untersuchung von Funktion

INHALTSFELD: FUNKTIONEN UND ANALYSIS (A)

Inhaltliche Schwerpunkte:

Differentialrechnung: Ableitungsregeln (Potenz-, Summen- und Faktorregel), Monotonie, Extrempunkte, lokale und globale Extrema, Krümmungsverhalten, Wendepunkte

Kompetenzerwartungen

- (5) berechnen mittlere und lokale Änderungsraten und interpretieren sie im Sachkontext,
- (9) bestimmen Sekanten-, Tangenten- sowie Normalensteigungen und berechnen Steigungswinkel,
- (12) beschreiben das Monotonieverhalten einer Funktion mithilfe der Ableitung,
- (13) nutzen die Ableitungsregel für Potenzfunktionen mit natürlichem Exponenten,
- (14) wenden die Summen- und Faktorregel an
- (15) unterscheiden lokale und globale Extrema im Definitionsbereich,
- (16) verwenden das notwendige Kriterium und hinreichende Kriterien zur Bestimmung von Extrem- bzw. Wendepunkten,
- (17) beschreiben das Krümmungsverhalten des Graphen einer Funktion mithilfe der 2. Ableitung,
- (18) nutzen an den unterschiedlichen Darstellungsformen einer Funktion ablesbare Eigenschaften als Argumente, um Lösungswege effizient zu gestalten,
- (19) lösen innermathematische und anwendungsbezogene Problemstellungen mithilfe von ganzrationalen Funktionen.

Buch | EdM | EF | Kapitel 3 | Funktionsuntersuchung | S. 84-113

Die Motivation zur weiteren Beschäftigung mit Polynomfunktionen und Extremwertbestimmungen soll durch eine Optimierungsaufgabe geweckt werden. Die verschiedenen Möglichkeiten, eine Schachtel aus einem DIN-A4-Blatt herzustellen, führen insbesondere auf Polynomfunktionen vom Grad 3. Hier können sich alle bislang erarbeiteten Regeln bewähren.

Anknüpfend an das graphische Differenzieren (vgl. A2) wird der Begriff der Monotonie einer Funktion mit Hilfe des Ableitungsgraphen in Sachzusammenhängen durch ganzrationale Funktionen thematisiert. Es werden die Zusammenhänge zwischen den Extrempunkten der Ausgangsfunktion und den Nullstellen ihrer Ableitung durch die Betrachtung von Monotonieintervallen und der möglichen vier Fälle bezogen auf Vorzeichenwechsel an den Nullstellen der Ableitung vertieft untersucht. Auch die Frage nach dem generellen Verlauf einer ganzrationalen Funktion kann an der Optimierungsaufgabe entwickelt werden.

Die Schülerinnen und Schüler üben anschließend, vorstellungsbezogen mithilfe von notwendigen und hinreichenden (zunächst ausschließlich mit dem VZW-Kriterium) Bedingungen von Extrempunkten zu argumentieren. Neben den Fällen, in denen das Vorzeichenwechselkriterium angewendet wird, werden die Lernenden auch mit Situationen konfrontiert, in denen sie mit den Eigenschaften des Graphen oder Terms (Globalverhalten, Symmetrie) argumentieren.

Prozessbezogene Kompetenzen: Die Schülerinnen und Schüler... Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an, Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt, Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten, Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus, Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus, Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen, Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem (MMS) zum • Erstellen von Graphen und Wertetabellen von Funktionen, • Ermitteln eines Funktionsterms der Ableitung einer Funktion auch abhängig von Parametern, Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus, Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle, Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu, Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells, Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung, Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit, Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung,	So erzwingt z. B. Achsensymmetrie die Existenz eines Extrempunktes auf der Symmetrieachse. An dieser Stelle kann sich auch die Unterscheidung von lokalen, globalen und Randextremstellen anschließen. Die Bestimmung der Nullstellen der ersten Ableitung ermöglicht das Wiederholen der Techniken zum Lösen von Gleichungen (vgl. A1). Die Beschreibung von Links- und Rechtskurven über die Zu- und Abnahme der Steigung führt zu einer geometrischen Deutung der zweiten Ableitung einer Funktion als „Krümmung“ des Graphen. Die simultane Betrachtung beider Ableitungen führt zur Entdeckung eines weiteren hinreichenden Kriteriums für Extrempunkte (f''-Kriterium). Anhand einer Funktion mit Sattelpunkt wird die Grenze dieses hinreichenden Kriteriums entdeckt. Vor- und Nachteile der beiden hinreichenden Kriterien werden abschließend von den Lernenden kritisch bewertet. Anschließend werden die Extrema der Ableitung als Wendestellen der Ausgangsfunktion thematisiert. Notwendige Bedingung und beide Formen der hinreichenden Bedingung werden zur Bestimmung der Wendestellen vertieft. Beim Lösen von innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen werden die erworbenen Kompetenzen vernetzt und vertieft. Anhand einer Beispielfunktion werden in einer Übersicht die Aspekte Globalverlauf, Symmetrie, Nullstellen, Monotonieverhalten, Extremstellen und Wendepunkte einer Funktionsuntersuchung festgehalten.
--	--

Pro-(4)	erkennen Muster und Beziehungen und generieren daraus Vermutungen,	
Pro-(5)	nutzen heuristische Strategien und Prinzipien (Analogiebetrachtungen, Schätzen und Überschlagen, systematisches Probieren oder Ausschließen, Darstellungswechsel, Zerlegen und Ergänzen, Symmetrien verwenden, Invarianten finden, Zurückführen auf Bekanntes, Zerlegen in Teilprobleme, Fallunterscheidungen, Vorwärts- und Rückwärtsarbeiten, Spezialisieren und Verallgemeinern),	
Pro-(6)	wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus,	
Pro-(8)	berücksichtigen einschränkende Bedingungen,	
Pro-(9)	entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus,	
Pro-(10)	überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung,	
Pro-(12)	vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz,	
Pro-(13)	benennen zugrundeliegende heuristische Strategien und Prinzipien und übertragen diese begründet auf andere Problemstellungen,	
Arg-(1)	stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf,	
Arg-(4)	erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen,	
Arg-(5)	begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente,	
Arg-(6)	entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten,	
Arg-(8)	verwenden in ihren Begründungen vermehrt logische Strukturen (notwendige und hinreichende Bedingung, Folgerung, Äquivalenz, Und- sowie Oder- Verknüpfungen, Negation, All- und Existenzaussagen),	

Arg-(9)	erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise,	
Arg-(10)	beurteilen, ob vorliegende Argumentationsketten vollständig und fehlerfrei sind,	
Arg-(11)	ergänzen lückenhafte und korrigieren fehlerhafte Argumentationsketten,	
Arg-(12)	beurteilen Argumentationsketten hinsichtlich ihres Geltungsbereichs und ihrer Übertragbarkeit,	
Kom-(5)	formulieren eigene Überlegungen und beschreiben zunehmend komplexe eigene Lösungswege,	
Kom-(7)	wählen begründet geeignete digitale und analoge Medien und mathematische Darstellungsformen (graphisch-visuell, algebraisch-formal, numerisch-tabellarisch, verbal-sprachlich) aus,	
Kom-(9)	dokumentieren und präsentieren Arbeitsschritte, Lösungswege und Argumentationen vollständig und kohärent,	
Kom-(12)	nehmen zu mathematikhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung,	
Kom-(13)	vergleichen und beurteilen ausgearbeitete Lösungen unter mathematischen Gesichtspunkten hinsichtlich ihrer Verständlichkeit und fachsprachlichen Qualität.	

Unterrichtsvorhaben E G1: Koordinatisierungen des Raumes; Eigenschaften von Vektoren (ca. 12 Unterrichtsstunden)

INHALTSFELD: ANALYTISCHE GEOMETRIE UND LINEARE ALGEBRA (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

Punkte, Ortsvektoren, Vektoren, Eigenschaften von Vektoren: Länge, Kollinearität

Die Schülerinnen und Schüler

- (1) wählen geeignete kartesische Koordinatisierungen für die Bearbeitung eines geometrischen Sachverhalts in der Ebene und im Raum,
- (2) stellen geometrische Objekte in einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem dar
- (3) deuten Vektoren geometrisch als Verschiebungen und in bestimmten Kontexten als Geschwindigkeit,
- (4) berechnen Längen von Vektoren und Abstände zwischen Punkten mithilfe des Satzes des Pythagoras
- (5) subtrahieren und addieren Vektoren, multiplizieren Vektoren mit einem Skalar und untersuchen Vektoren auf Kollinearität,
- (6) weisen Eigenschaften geometrischer Figuren mithilfe von Vektoren nach.

Prozessbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,

Buch | EdM | EF | Kapitel 3 | Vektoren und Geraden im Raum | S. 116-133

Mit Rückbezug auf das den Schülerinnen und Schülern bisher bekannte Koordinatensystem wird nun die Lage von Punkten im Raum betrachtet. Dazu kann im Einstieg das Klassenzimmer als Vereinfachung eines Koordinatensystems genutzt werden, in dem Punkte durch dreidimensionale Koordinaten angegeben werden.

Es sollte besonders darauf geachtet werden, dass die Schülerinnen und Schüler Punkte in ein räumliches Koordinatensystem einzeichnen können und darauf hingewiesen werden, dass Punkte im Schrägbild im Allgemeinen nicht eindeutig ablesbar sind.

Ein weiterer Schritt stellt die Betrachtung geometrischer Körper im Raum dar. Dazu können DGS oder eventuell reale Modelle (von Körpern oder des räumlichen Koordinatensystems) genutzt werden, um das räumliche Vorstellungsvermögen der Schülerinnen und Schüler zu fordern. Durch Verwendung von DGS üben die Schülerinnen und Schüler außerdem das Nutzen solcher "Werkzeuge".

Im Anschluss kann die Verschiebung von Punkten im Raum betrachtet werden. Dazu können beispielsweise Verschiebungen von Schachfiguren auf dem Schachbrett, Verladungen von Containern oder auch Verschiebungen von Dreiecken im Raum diskutiert werden.

Des Weiteren wird durch anwendungsbezogene Aufgaben (z.B. Flugbahn eines Heißluftballons, Bewegungen auf dem Wasser) aufgezeigt, dass Vektoren Geschwindigkeiten und Bewegungen und Kräfte beschreiben können.

Solche Aufgaben fordern das Übertragen von realen Modellen auf

Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt, Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch, Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten, Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus, Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese, Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus, Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven, Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen. Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung, Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor. Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle, Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu, Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells. Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,	die Mathematik. Ein Schwerpunkt des Unterrichtsvorhabens sind die elementaren Rechenoperationen für Vektoren (Vektoraddition und Vervielfachung von Vektoren durch Multiplikation mit skalaren Größen). Hintereinander ausgeführte Verschiebungen können durch eine neue Verschiebung beschrieben werden. Über das einfache Rechnen hinaus können anschaulich die vorhandenen Gruppen- und Vektorraumstrukturen und die damit bestehende Gültigkeit elementarer Rechenregeln und -gesetze verdeutlicht werden. Zudem wird die Länge von Vektoren herausgearbeitet. Dazu wird auf den bereits bekannten Satz des Pythagoras und die ebenfalls aus der Sek I bekannte Verallgemeinerung auf „Raumdiagonalen“ zurückgegriffen. Zum Abschluss werden einige Eigenschaften ebener Figuren (Dreiecke und Vierecke) untersucht. Beispielsweise können mithilfe der Vektorlänge Dreiecke auf Gleichschenkligkeit/-seitigkeit überprüft werden, Viereckseiten zudem auf Parallelität. Die Rechtwinkligkeit von Dreiecken kann mit Pythagoras überprüft werden.
---	---

Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen, Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit, Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung. Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren), Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus, Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein, Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen, Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus, Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung, Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern, Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf, Arg-(2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele, Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur. Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen, Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente, Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten, Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch), Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise.	
---	--

Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen, Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter, Kom-(12) nehmen zu mathemathhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung.	
---	--

Unterrichtsvorhaben E G2: Geraden und Strecken: Parameterform; Lagebeziehung von Geraden (ca. 18 Unterrichtsstunden)

INHALTSFELD: ANALYTISCHE GEOMETRIE UND LINEARE ALGEBRA (G)

Inhaltliche Schwerpunkte:

Geraden und Strecken, Lagebeziehungen von Geraden

Die Schülerinnen und Schüler

- (7) stellen Geraden und Strecken in Parameterform dar
- (8) interpretieren Parameter von Geradengleichungen im Sachkontext
- (9) untersuchen Lagebeziehungen von Geraden,
- (10) untersuchen geometrische Situationen im Raum mithilfe digitaler Mathematikwerkzeuge,
- (11) nutzen Eigenschaften von Vektoren und Parametergleichungen von Geraden beim Lösen von innermathematischen und anwendungsbezogenen Problemstellungen,
- (12) lösen lineare Gleichungssysteme im Zusammenhang von Lagebeziehungen von Geraden und interpretieren die jeweilige Lösungsmenge.

Prozessbezogene Kompetenzen:

Die Schülerinnen und Schüler

- Ope-(1) wenden grundlegende Kopfrechenfertigkeiten sicher an,
- Ope-(2) übersetzen symbolische und formale Sprache in natürliche Sprache und umgekehrt,
- Ope-(3) führen geeignete Rechenoperationen auf der Grundlage eines inhaltlichen Verständnisses durch,
- Ope-(4) verwenden Basiswissen, mathematische Regeln und Gesetze sowie Algorithmen bei der Arbeit mit mathematischen Objekten,

Buch | EdM | EF | Kapitel 3 | Vektoren und Geraden im Raum | S. 134-145

Mit Rückbezug auf das den Schülerinnen und Schülern bisher bekannte Koordinatensystem wird nun die Lage von Punkten im Raum betrachtet. Dazu kann im Einstieg das Klassenzimmer als Vereinfachung eines Koordinatensystems genutzt werden, in dem Punkte durch dreidimensionale Koordinaten angegeben werden.

Es sollte besonders darauf geachtet werden, dass die Schülerinnen und Schüler Punkte in ein räumliches Koordinatensystem einzeichnen können und darauf hingewiesen werden, dass Punkte im Schrägbild im Allgemeinen nicht eindeutig ablesbar sind.

Ein weiterer Schritt stellt die Betrachtung geometrischer Körper im Raum dar. Dazu können DGS oder eventuell reale Modelle (von Körpern oder des räumlichen Koordinatensystems) genutzt werden, um das räumliche Vorstellungsvermögen der Schülerinnen und Schüler zu fordern. Durch Verwendung von DGS üben die Schülerinnen und Schüler außerdem das Nutzen solcher "Werkzeuge".

Im Anschluss kann die Verschiebung von Punkten im Raum betrachtet werden. Dazu können beispielsweise Verschiebungen von Schachfiguren auf dem Schachbrett, Verladungen von Containern oder auch Verschiebungen von Dreiecken im Raum diskutiert werden.

Des Weiteren wird durch anwendungsbezogene Aufgaben (z.B. Flugbahn eines Heißluftballons, Bewegungen auf dem Wasser) aufgezeigt, dass Vektoren Geschwindigkeiten und Bewegungen beschreiben können. Solche Aufgaben fordern das Übertragen von realen Modellen auf die Mathematik. Ein Schwerpunkt des Unterrichtsvorhabens sind die elementaren Rechenoperationen für Vektoren (Vektoraddition und

Ope-(5) führen Darstellungswechsel sicher aus, Ope-(6) führen verschiedene Lösungs- und Kontrollverfahren durch, vergleichen und bewerten diese, Ope-(7) nutzen schematisierte und strategiegeleitete Verfahren und wählen diese situationsgerecht aus, Ope-(8) erstellen Skizzen geometrischer Situationen und wechseln zwischen Perspektiven, Ope-(9) verwenden grundlegende Eigenschaften mathematischer Objekte zur Bearbeitung von Problemstellungen. Ope-(11) nutzen Mathematikwerkzeuge zum Darstellen, Berechnen, Kontrollieren und Präsentieren sowie zum Erkunden, Ope-(12) verwenden im Unterricht ein modulares Mathematiksystem¹ (MMS) zum ... – Lösen von Gleichungen und Gleichungssystemen auch abhängig von Parametern, - Darstellen von geometrischen Situationen im Raum Ope-(13) entscheiden situationsangemessen über den Einsatz mathematischer Hilfsmittel und digitaler Mathematikwerkzeuge und wählen diese begründet aus Mod-(1) erfassen und strukturieren zunehmend komplexe reale Situationen mit Blick auf eine konkrete Fragestellung, Mod-(2) treffen begründet Annahmen und nehmen Vereinfachungen realer Situationen vor. Mod-(3) übersetzen zunehmend komplexe reale Situationen in mathematische Modelle, Mod-(4) ordnen einem mathematischen Modell passende reale Situationen zu, Mod-(5) erarbeiten mithilfe mathematischer Kenntnisse und Fertigkeiten Lösungen innerhalb des mathematischen Modells. Mod-(6) beziehen erarbeitete Lösungen wieder auf die reale Situation und interpretieren diese als Antwort auf die Fragestellung,	Vervielfachung von Vektoren durch Multiplikation mit skalaren Größen). Hintereinander ausgeführte Verschiebungen können durch eine neue Verschiebung beschrieben werden. Über das einfache Rechnen hinaus können anschaulich die vorhandenen Gruppen- und Vektorraumstrukturen und die damit bestehende Gültigkeit elementarer Rechenregeln und -gesetze verdeutlicht werden. Zudem wird die Länge von Vektoren herausgearbeitet. Dazu wird auf den bereits bekannten Satz des Pythagoras und die ebenfalls aus der Sek I bekannte Verallgemeinerung auf „Raumdiagonalen“ zurückgegriffen. Zum Abschluss werden einige Eigenschaften ebener Figuren (Dreiecke und Vierecke) untersucht. Beispielsweise können mithilfe der Vektorlänge Dreiecke auf Gleichschenklig-/seitigkeit überprüft werden, Viereckseiten zudem auf Parallelität. Die Rechtwinkligkeit von Dreiecken kann mit Pythagoras überprüft werden.
--	---

Mod-(7) reflektieren die Abhängigkeit der Lösungen von den getroffenen Annahmen, Mod-(8) benennen Grenzen aufgestellter mathematischer Modelle und vergleichen Modelle bzgl. der Angemessenheit, Mod-(9) verbessern aufgestellte Modelle mit Blick auf die Fragestellung. Pro-(3) wählen zur Erfassung einer Situation heuristische Hilfsmittel aus (Skizze, informative Figur, Tabelle, experimentelle Verfahren), Pro-(6) wählen geeignete Begriffe, Zusammenhänge, Verfahren sowie Medien und Werkzeuge zur Problemlösung aus, Pro-(7) setzen Routineverfahren auch hilfsmittelfrei zur Lösung ein, Pro-(8) berücksichtigen einschränkende Bedingungen, Pro-(9) entwickeln Ideen für mögliche Lösungswege, planen Vorgehensweisen zur Lösung eines Problems und führen Lösungspläne zielgerichtet aus, Pro-(10) überprüfen die Plausibilität von Ergebnissen und interpretieren diese vor dem Hintergrund der Fragestellung, Pro-(11) analysieren und reflektieren Ursachen von Fehlern, Pro-(12) vergleichen und beurteilen verschiedene Lösungswege und optimieren diese mit Blick auf Schlüssigkeit und Effizienz, Arg-(1) stellen Fragen, die für die Mathematik charakteristisch sind, und stellen begründete Vermutungen über die Existenz und Art von Zusammenhängen auf, Arg-(2) unterstützen Vermutungen durch geeignete Beispiele, Arg-(3) präzisieren Vermutungen mithilfe von Fachbegriffen und unter Berücksichtigung der logischen Struktur. Arg-(4) erläutern Zusammenhänge zwischen Fachbegriffen, Arg-(5) begründen Lösungswege und nutzen dabei mathematische Regeln und Sätze sowie sachlogische Argumente, Arg-(6) entwickeln tragfähige Argumentationsketten durch die Verknüpfung von einzelnen Argumenten, Arg-(7) nutzen verschiedene Argumentationsstrategien (Gegenbeispiel, direktes Schlussfolgern, Widerspruch), Arg-(9) erklären vorgegebene Argumentationsketten und mathematische Beweise.	
--	--

Kom-(3) erläutern mathematische Begriffe in innermathematischen und anwendungsbezogenen Zusammenhängen, Kom-(6) verwenden die Fachsprache und fachspezifische Notation in angemessenem Umfang Kom-(11) greifen Beiträge auf und entwickeln sie weiter, Kom-(12) nehmen zu mathemathhaltigen, auch fehlerbehafteten, Aussagen und Darstellungen begründet und konstruktiv Stellung.	
---	--